MIIA – Präsenzaufgaben Nr. 1
25.04. – 27.04.2007

1. In $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie betrachte man die Unterräume Z der Form $]0,1], \{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} : k \in \mathbb{N}\}, \{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\},]0,1] \cup]2,3], \mathbb{Q}, \ldots$ und untersuche sie in Bezug auf die folgenden Fragen:

   (a) Handelt es sich um die feinste Topologie?

   (b) Ist die Topologie Hausdorffsch?

   (c) Wie sehen typische Umgebungsbasen aus?

   (d) Wie sieht die Gesamtheit der stetigen Abbildungen $f : \mathbb{R} \to Z$ nach Z aus?

   (e) Wie sieht die Gesamtheit der stetigen Abbildungen $g : Z \to \mathbb{R}$ von Z nach $\mathbb{R}$ aus?

2. Auf $X = \{1,2,3,4\}$ betrachte man $\mathcal{S} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$.

   (a) Man zeige, dass $\mathcal{S}$ eine Topologie ist und bestimme die abgeschlossenen Mengen und die Umgebungssysteme. Ist die Topologie Hausdorffsch?

   (b) Dasselbe für die Topologie, die $\mathcal{S}$ als System der abgeschlossenen Mengen hat.

   (c) Man bestimme jeweils minimale Basen der Topologien.

3. Man beweise oder widerlege: Eine Topologie auf einer endlichen Menge ist genau dann Hausdorffsch, wenn sie die feinste Topologie ist.

4. Für topologische Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, \ldots, m$, ist die Produkttopologie durch

$$\prod_{i=1}^{m} \mathcal{T}_i := \{W \subset \prod_{i=1}^{m} X_i \mid \forall\, a \in W\ \exists\, U_i \in \mathcal{T}_i : a \in \prod_{i=1}^{m} X_i \subset W\}$$

   gegeben. Zeige:

   (a) Das ist eine Topologie.

   (b) Die Projektionen sind stetig.

   (c) Eine Abbildung $f : Z \to \prod_{i=1}^{m} X_i$ ist genau dann stetig, wenn alle $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$ stetig sind.

   (d) Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie, für die die Projektionen stetig sind.

   (e) Basis dazu ist $\{\prod_{i=1}^{m} U_i : U_i \in \mathcal{T}_i\}$.